课时跟踪训练(十七)　曲线的交点

1．曲线*x*2－*xy*－*y*2－3*x*＋4*y*－4＝0与*x*轴的交点坐标是\_\_\_\_\_\_\_\_．

2．曲线*x*2＋*y*2＝4与曲线*x*2＋＝1的交点个数为\_\_\_\_\_\_\_\_．

3．设抛物线*y*2＝8*x*的准线与*x*轴交于点*Q*，若过点*Q*的直线*l*与抛物线有公共点，则直线*l*的斜率的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_．

4．曲线*y*＝*x*2－*x*＋2和*y*＝*x*＋*m*有两个不同的公共点，则实数*m*的范围是\_\_\_\_\_\_\_\_．

5．如果椭圆＋＝1的一条弦被点(4,2)平分，那么这条弦所在直线的方程是\_\_\_\_\_\_\_\_．

6．已知椭圆的中心在原点，焦点在*x*轴上，长轴长为4，离心率为.

(1)求椭圆的标准方程；

(2)直线*l*与该椭圆交于*M*、*N*两点，*MN*的中点为*A*(2，－1)，求直线*l*的方程．

7．已知椭圆*C*1与抛物线*C*2的焦点均在*x*轴上，*C*1的中心和*C*2的顶点均为原点*O*，从每条曲线上取两个点，将其坐标记录于下表中：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 3 | －2 | 4 |  |
| *y* | －2 | 0 | －4 |  |

(1)求*C*1，*C*2的标准方程；

(2)请问是否存在直线*l*满足条件：①过*C*2的焦点*F*；②与*C*1交于不同两点*M*，*N*且满足⊥？若存在，求出直线*l*的方程；若不存在，说明理由．

8．已知椭圆*C*的中心在坐标原点，焦点在*x*轴上，椭圆*C*上的点到焦点的距离的最大值为3，最小值为1.

(1)求椭圆*C*的标准方程；

(2)若直线*l*：*y*＝*kx*＋*m*与椭圆*C*相交于*A*，*B*两点(*A*，*B*不是左右顶点)，且以*AB*为直径的圆过椭圆*C*的右顶点．求证：直线*l*过定点，并求出该定点的坐标．

答 案

1．解析：当*y*＝0时，得*x*2－3*x*－4＝0，解得*x*1＝4或*x*2＝－1.所以交点坐标为(4,0)和(－1,0)．

答案：(4,0)，(－1,0)

2．解析：由数形结合可知两曲线有4个交点．

答案：4

3．解析：由*y*2＝8*x*，得准线方程为*x*＝－2.则*Q*点坐标为(－2,0)．设直线*y*＝*k*(*x*＋2)．由()得*k*2*x*2＋(4*k*2－8)*x*＋4*k*2＝0.若直线*l*与*y*2＝8*x*有公共点，则*Δ*＝(4*k*2－8)2－16*k*4≥0.解得－1≤*k*≤1.

答案：[－1,1]

4．解析：由消去*y*，得*x*2－2*x*＋2－*m*＝0.若有两个不同的公共点，则*Δ*＝4－4(2－*m*)>0，∴*m*>1.

答案：(1，＋∞)

5．解析：设直线与椭圆的交点为*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)．∵*P*(4,2)为*AB*中点，∴*x*1＋*x*2＝8，*y*1＋*y*2＝4.又∵*A*，*B*在椭圆上，∴*x*＋4*y*＝36，*x*＋4*y*＝36.两式相减得(*x*－*x*)＋4(*y*－*y*)＝0，即(*x*1＋*x*2)(*x*1－*x*2)＋4(*y*1＋*y*2)(*y*1－*y*2)＝0，∴＝()()＝－.即直线*l*的斜率为－.∴所求直线方程为*x*＋2*y*－8＝0.

答案：*x*＋2*y*－8＝0

6．解：(1)由题意2*a*＝4，

∴*a*＝2，又*e*＝＝＝，

∴*c*＝.

∴*b*2＝*a*2－*c*2＝8－3＝5.

故所求椭圆的标准方程为＋＝1.

(2)∵点*A*在椭圆内部，

∴过*A*点的直线必与椭圆有两交点．

当直线斜率不存在时，*A*点不可能为弦的中点，故可设直线方程为*y*＋1＝*k*(*x*－2)，它与椭圆的交点分别为*M*(*x*1，*y*1)，*N*(*x*2，*y*2)，

则()消去*y*得

(8*k*2＋5)*x*2－16*k*(2*k*＋1)*x*＋8[(2*k*＋1)2－5]＝0，

∴*x*1＋*x*2＝()，

又∵*A*(2，－1)为弦*MN*的中点，

∴*x*1＋*x*2＝4，即()＝4，

∴*k*＝，从而直线方程为5*x*－4*y*－14＝0.

7．解：(1)设抛物线*C*2：*y*2＝2*px*(*p*≠0)，则有＝2*p*(*x*≠0)，据此验证4个点知(3，－2)，(4，－4)在抛物线上，易求*C*2：*y*2＝4*x*.

设*C*1：＋＝1(*a*>*b*>0)，把点(－2,0)，代入得解得

∴*C*1的方程为＋*y*2＝1.

(2)容易验证直线*l*的斜率不存在时，不满足题意；

当直线*l*的斜率存在时，假设存在直线*l*过抛物线焦点*F*(1,0)，设其方程为*y*＝*k*(*x*－1)，与*C*1的交点坐标为*M*(*x*1，*y*1)，*N*(*x*2，*y*2)．

由()消去*y*得，

(1＋4*k*2)*x*2－8*k*2*x*＋4(*k*2－1)＝0，

于是*x*1＋*x*2＝，*x*1*x*2＝().　　　　　①

所以*y*1*y*2＝*k*(*x*1－1)·*k*(*x*2－1)

＝*k*2[*x*1*x*2－(*x*1＋*x*2)＋1]

＝*k*2()＝－. ②

由⊥，即·＝0，得*x*1*x*2＋*y*1*y*2＝0. ③

将①②代入③式得，()－＝＝0，解得*k*＝±2.

所以存在直线*l*满足条件，且*l*的方程为：*y*＝2*x*－2或*y*＝－2*x*＋2.

8．解：(1)由题意设椭圆*C*的标准方程为＋＝1(*a*>*b*>0)．

由题意得*a*＋*c*＝3，*a*－*c*＝1，

∴*a*＝2，*c*＝1，*b*2＝3.

∴椭圆的标准方程为＋＝1.

(2)证明：设*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)，由得，

(3＋4*k*2)*x*2＋8*mkx*＋4(*m*2－3)＝0，

∴*Δ*＝64*m*2*k*2－16(3＋4*k*2)(*m*2－3)>0，

即3＋4*k*2－*m*2>0.

∴*x*1＋*x*2＝－，*x*1*x*2＝().

*y*1*y*2＝(*kx*1＋*m*)·(*kx*2＋*m*)

＝*k*2*x*1*x*2＋*mk*(*x*1＋*x*2)＋*m*2＝().

∵以*AB*为直径的圆过椭圆的右顶点*D*(2,0)，

*kAD*·*kBD*＝－1，

∴·＝－1，化简得

*y*1*y*2＋*x*1*x*2－2(*x*1＋*x*2)＋4＝0，

即()＋()＋＋4＝0，

化简得7*m*2＋16*mk*＋4*k*2＝0，

解得*m*1＝－2*k*，*m*2＝－，且满足3＋4*k*2－*m*2>0.

当*m*＝－2*k*时，*l*：*y*＝*k*(*x*－2)，直线过定点(2,0)，与已知矛盾；

当*m*＝－时，*l*：*y*＝*k*，直线过定点.

综上可知，直线*l*过定点，定点坐标为.